ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

М. Ф. Кулагина

Чувашский государственный университет
kulagina@chuvsu.ru

В работах автора [1] и [2] введено обобщенное дискретное преобразование Фурье (ОДФ), которое каждой почти-периодической в смысле Бора функции, заданной на действительной оси, ставит в соответствие ее ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье и его показатели определяются через заданную функцию по известным формулам. Есть также формулы, дающие обратное преобразование. Существует взаимно однозначное соответствие между почти-периодическими функциями и их рядами Фурье.

С помощью ОДФ в [3] строятся почти-периодические решения основных задач теории упругости для полуплоскости и полосы, в [4] – решение второй основной задачи теории упругости для двухслойной полосы при условии жесткого сцепления.

В настоящей работе с помощью ОДФ строятся почти-периодические решения ряда задач о распространении поверхностных волн. Все решения задач получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются очень просто через заданные функции.

1. Рассматриваются поверхностные волны в полубесконечной жидкой среде $y \leq 0$, возникающие под действием динамического давления. Для определения потенциала скоростей $\phi(x,y,t)$ в этом случае надо решить задачу

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=0}=0, \tag{1}$$

где $\phi(x,y,t)$ равномерно стремится к нулю по x и t при $y\to-\infty$,

$$\phi(x,y,t)|_{y=0,t=0}=\frac{p_0(x)}{\rho}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}|_{y=0,t=0}=0. \tag{2}$$

Если заданная и искомая функции $p_0(x)$ и $\phi(x,y,t)$ представимы в виде рядов Фурье

$$p_0(x) = \sum_{\lambda\neq 0} p(\lambda)e^{i\lambda x}, \qquad \phi(x,y,t) = a_\lambda(y,t)e^{i\lambda x},$$

то, используя ОДФ, найдем неизвестные коэффициенты $a_\lambda(y,t)$ и получим

$$\phi(x,y,t) = \frac{1}{\rho}\sum_{\lambda\neq 0} p(\lambda)\cos\left(\sqrt{g|\lambda|}t\right)e^{|\lambda|y+i\lambda x}.$$

Отклонение $\eta(x,t)$ точек свободной поверхности от положения равновесия в момент времени t дается формулой

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\Big|_{y=0} = -\frac{1}{\rho g}\sum_{\lambda\neq 0} p(\lambda)\sqrt{g|\lambda|}\sin\left(\sqrt{g|\lambda|}t\right)e^{i\lambda x}.$$

2. Рассматривается та же задача, но волны обусловлены начальным смещением. Для определения потенциала скоростей в этом случае надо решить задачу (1) с условиями

$$\phi(x,y,t)\,|_{y=0,t=0} = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = gf(x).$$

Если заданная и искомая функции $f(x)$ и $\phi(x,y,t)$ представимы в виде рядов Фурье

$$f(x) = \sum_{\lambda\neq 0} f(\lambda)e^{i\lambda x}, \qquad \phi(x,y,t) = \sum_{\lambda\neq 0} a_\lambda(y,t)e^{i\lambda x},$$

то, используя ОДФ, найдем неизвестные коэффициенты $a_\lambda(y,t)$, и получим

$$\phi(x,y,t) = \sum_{\lambda\neq 0}\sqrt{\frac{g}{|\lambda|}}f(\lambda)\sin\left(\sqrt{g|\lambda|}t\right)e^{|\lambda|y+i\lambda x},$$

$$\eta(x,t) = \sum_{\lambda\neq 0} f(\lambda)\cos\left(\sqrt{g|\lambda|}t\right)e^{i\lambda x}.$$

3. Рассматривается задача о распространении поверхностных волн, возникающих под действием динамического давления, в случае конечной глубины жидкости. Переменная y изменяется в пределах от $-h$ до 0 ($-h \le y \le 0$). В этом случае к уравнениям (1), описывающим волновое движение жидкости, добавляется еще одно уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=-h} = 0.$$

Граничные и начальные условия имеют вид (2). Если заданная и искомая функции $p_0(x)$ и $\phi(x,y,t)$ представимы в виде рядов Фурье

$$p_0(x) = p_0 + \sum_{\lambda \neq 0} p(\lambda) e^{i\lambda x}, \qquad \phi(x,y,t) = \sum_{\lambda \neq 0} a_\lambda(y,t) e^{i\lambda x},$$

то, используя ОДФ, получим

$$\phi(x,y,t) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sum_{\lambda \neq 0} p(\lambda) \cos\left(\sqrt{g|\lambda| \operatorname{th}(\lambda h)}\, t\right) \frac{\operatorname{ch}(|\lambda|(h+y))}{\operatorname{ch}(|\lambda| h)} e^{i\lambda x},$$

$$\eta(x,t) = \frac{1}{\rho g} \sum_{\lambda \neq 0} p(\lambda) \sin\left(\sqrt{g|\lambda| \operatorname{th}(|\lambda| h)}\, t\right) \sqrt{g|\lambda| \operatorname{th}(|\lambda| h)}\, e^{i\lambda x}.$$

Ранее задачи о распространении поверхностных волн были подробно рассмотрены в монографии [5]. Там они решались с помощью интегрального преобразования Фурье. Решения задач выражаются через обратное преобразование Фурье, которое представляет собой несобственный интеграл от колеблющихся функций, что вызывает большие вычислительные трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулагина М.Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – N 3. – С. 18–23.

2. Кулагина М.Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – N 8. – С. 19–29.

3. Кулагина М.Ф. *Построение почти-периодических решений основных задач теории упругости для полосы и полуплоскости* // Вестник Чувашского университета. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. – N 2. – С. 126–137.

4. Кулагина М.Ф. *Построение почти-периодических решений второй основной задачи теории упругости для двухслойной полосы* // Известия Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики. – 1996. – N 6. – С. 48–55.

5. Снеддон И. *Преобразование Фурье.* – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1995. – 667 с.

ОБРАЗОВАНИЕ ВЕРХОВОДОК ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В НЕНАСЫЩЕННОМ СЛОИСТОМ ГРУНТЕ

А. Н. Николаев

НИИММ Казанского государственного университета

В работе рассматриваются плоские задачи установившегося нисходящего ненасыщенного потока жидкости через толщу слоистого грунта, исследуются условия появления насыщенных верховодок при наличии слабопроницаемых пропластков. Верховодкой называется насыщенная зона, возникающая на границе слоев и находящаяся в подвешенном состоянии внутри ненасыщенной области. В случае ее расположения на водоупоре назовем эту зону "языком" насыщения.

Грунт считается изотропным, недеформируемым, жидкость несжимаемой, давление газовой фазы в ненасыщенном грунте равно атмосферному.

Установившееся плоское движение в насыщенно-ненасыщенной среде при отсутствии внутренних источников и стоков описывается уравнением [2,4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(p)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(p)\frac{\partial h}{\partial y}\right)=0, \qquad p<0,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0, \qquad p>0,$$

где $k(p)$ – коэффициент влагопроводности (тождественно равный коэффициенту фильтрации $k_ф$ в зоне полного насыщения), $h = p + y$ – напор, p – давление, отрицательное в зоне неполного насыщения и положительное в насыщенной зоне (атмосферное давление считается равным нулю), x, y – декартовые координаты.

Не ограничивая общности, рассматриваем область фильтрации Ω_m в виде прямоугольника $ABCD$ (рис. 1). На рисунке участок BC является поверхностью земли, через которую происхо-